

关于时滞微分方程非负解的注记*

徐士河^{1,2}, 崔尚斌¹

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;
2. 肇庆学院数学与信息科学学院, 广东 肇庆 526061)

摘要: 给出了一类时滞微分方程解为正解的充分条件及其初值非负情况下解在有限时刻可能为负的一个充分条件。并给出一个例子说明时滞对方程解的非负性的影响。

关键词: 时滞微分方程; 非负解; 正解

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 04-0144-02

时滞微分方程广泛出现于物理学、化学、生物学等多个领域。因此, 对于这类方程的研究具有重要的意义。近几十年对此类方程的研究非常多, 有大量工作研究解的振荡性质, 如文 [1-7]。由于出现于物理学、化学、生物学等领域的时滞微分方程, 其未知函数往往代表密度、浓度等物理量, 这些物理量都不能取负值, 因为如果一个用来描述密度、浓度等物理量的方程, 其解若取负值, 则意味着这个方程是不合理的, 这种例子十分常见, 所以判定时滞微分方程的解是否都是正解, 具有重要的意义。

与解的振荡性质的研究不同, 对时滞微分方程解的非负性的研究工作并不多。文 [8] 中给出保证方程初值问题

$$x'(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau)) \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad (2)$$

的解为非负解的一些充分条件:

当 $\varphi(0) \geq 0$, 若初值问题

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = \varphi(0)$$

只有非负解, 并且对于任意 $s > 0$ 有 $g(s) \geq 0$, 则当 $\varphi(t) \geq 0, -\tau \leq t \leq 0$, 问题(1)-(2)的解在其存在区间上一定是非负的。

受文 [8] 的启发, 本文讨论下列问题的解是否都是正解:

$$x'(t) = x(t)[f(x(t)) + g(x(t), x(t-\tau))] \quad (3)$$

$$x'(t) = G(x(t), x(t-\tau)) \quad (4)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad (5)$$

类似于文 [8], 本文中假设 $\min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$ 。我们设 $f = f(x)$, $g = g(x, y)$ 满足以下条件:

(i) 当 $s \geq 0$ 时, $f(s) + g(s, s) \geq 0$;

(ii) f, g 关于其变量分别在 $(0, \infty), (0, \infty) \times (0, \infty)$ 上 Lipschitz 连续且 g 关于 y 严格单调递增。

设 $G(x, y)$ 满足以下条件:

(iii) 当 $s \geq 0, G(s, s) \geq 0$,

(iv) 关于其变量分别在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上 Lipschitz 连续且关于 y 严格单调递增。

本文的主要结果如下:

定理 1 设函数 $G(x, y)$ 满足条件 (iii) 和 (iv), 且 $\min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$, 则问题(4)-(5)的解必为正解。

证明 由泛函微分方程理论^[9]易知问题(4)-(5)的存在唯一解 $x(t) \in C[-\tau, T], [-\tau, T)$ 为问题(4)-(5)解的最大存在区间, T 可能为有限或无穷, 且 $x(t)$ 在 $(0, T)$ 满足方程(4)。下证对于任意 $t \in [-\tau, T)$ 都有 $x(t) > 0$ 。

由于 $\min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$, 则 $x(0) > 0$, 从而存在 $\delta > 0, t \in [0, \delta)$ 时, $x(t) > 0$ 。若存在 $t > 0$ 使得 $x(t) = 0$, 我们可设 t_0 为其中最小的。则当 $-\tau \leq t < t_0$ 时, $x(t) > 0$, 而 $x(t_0) = 0$ 。于是 $x'(t_0) \leq 0$ 且显然 $t_0 > 0$ 。若 $t_0 \leq \tau$, 我们断言: 对于任意 $t \in [0, t_0)$, 若 $x'(t) \leq 0$, 则 $x(t) \geq x(t-\tau)$ 。事实上, 若断言不成立, 则存在 $t \in [0, t_0)$, 使 $x'(t) \leq 0$, 而 $x(t-\tau) > x(t)$ 。由于 $t < t_0 \leq \tau$, 我们有 $t-\tau < 0$, 从而 $x(t-\tau) > 0$ 。又由 $t < t_0$ 知 $x(t) > 0$ 。于是由 (iii) 和 (iv) 有 $x'(t) = G(x(t), x(t-\tau)) > G(x(t), x(t)) \geq 0$, 而与 $x'(t) \leq 0$ 矛盾。因此断言成立。由断言易得:

* 收稿日期: 2007-12-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771223)

作者简介: 徐士河 (1982年生), 男, 博士生; E-mail: shihexu03@yahoo.com.cn

对任意 $t \in [0, t_0)$,

$$x(t) \geq \min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$$

应用数学归纳法和与前面相同的推理可知, 对任意的自然数 n , 若 $(n-1)\tau < t_0 \leq n\tau$, 则亦有 $x(t) \geq \min_{-\tau \leq t \leq n\tau} x(t) \geq \min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0, \forall t \in [-\tau, t_0)$ 。因此, 无论 t_0 在何位置, 我们都有

$$x(t) \geq \min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0, \forall t \in [-\tau, t_0)$$

据此和连续性可知, $x(t_0) \geq \min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$ 。矛盾! 从而证明问题(4) - (5)的解 $x(t)$ 在其存在区间 $[0, T)$ 上是恒正的。定理1证毕。

推论1 设函数 f, g 满足 (i) - (ii), 且 $\min_{-\tau \leq t \leq 0} \varphi(t) > 0$, 则问题(3), (5)的解必为正解。

定理2 设存在 $s_0 > 0$, 使得 $G(0, s_0) < 0$, 则存在合适的初值函数 $\varphi \in C[-\tau, 0)$, 且 $\varphi(t) \geq 0$ 使得问题(4) - (5)的解在有限时刻可以为负。

证明 令

$$\varphi(t) = \begin{cases} s_0, & t \in [-\tau, -\frac{\tau}{3}] \\ -\frac{3s_0}{\tau}t, & t \in (-\frac{\tau}{3}, 0] \end{cases}$$

则 $x(0) = 0, x'(0) = G(0, s_0) < 0$ 。易得一定存在 $t > 0$ 使得 $x(t) < 0$ 。

注 对于问题(3), (5)和问题(4) - (5), 若 $\tau = 0$, 非负初值可以保证非负解, 但并不能得到 $\tau > 0$ 也一定保证非负解。例如: 对方程

$$x'(t) = x^2(t) - (x(t) + 1)x(t - \tau)$$

易得当 $\tau = 0$ 时, 非负初值可以保证非负解。但是由定理3可以得到当 $\tau > 0$ 时, 存在非负初值, 使得方程 $x'(t) = x^2(t) - (x(t) + 1)x(t - \tau)$ 的解在

有限时刻可以为负。

参考文献:

- [1] BODNAR M, FORYS U. Time delay in necrotic core formation [J]. Math Biosci, 2005, 2: 461 - 472.
- [2] BYRNE H M. The effect of time delays on the dynamics of avascular tumour growth [J]. Math Biosci, 1997, 144: 83 - 117.
- [3] CUI S, XU S. Analysis of mathematical models for the growth of tumors with time delays in cell proliferation [J]. J Math Anal Appl, 2007, 336: 523 - 541.
- [4] FORYS U. Global Stability for a Class of Delay Differential Equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 581 - 585.
- [5] FORYS U, MARCINIAK-CZOCZRA A. Logistic equation in tumour growth modelling [J]. Int J Appl Math Comp Sci, 2003, 13 (3): 317 - 325.
- [6] KUANG Y. Delay Differential Equations with Application to Population Dynamics [M]. Boston: Academic Press, 1993.
- [7] ARKARR R S, BANERJEE S. A time delay model for control of malignant tumor growth [J]. National Conference on Nonlinear Systems and Dynamics, 2006, 1 - 4.
- [8] BODNAR M. The nonnegativity of solutions of delay differential equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2000, 13: 91 - 95.
- [9] HALE J. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 1977.
- [10] NAUROSCHAT J, ANDER HEIDEN U. Nonlinear mathematical models of hormonal systems [J]. J Math Biol, 1995, 3(3): 719 - 730.

A Note on Nonnegativity of Solutions of Delay Differential Equations

XU Shi-he^{1,2}, CUI Shang-bin¹

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Zhaoqing University, Zhaoqing, Guangdong 526061, China)

Abstract: This paper gives some sufficient conditions which guarantee the solutions of some delay differential equations are positive and the condition under which the corresponding solution with nonnegative initial function possibly become negative in a finite interval of time. An example which illustrates the influence of the time delay to the nonnegativity of the solution is presented.

Key words: delay differential equations; nonnegativity; positive solutions